Les candidats sont informés que la précision des raisonnements algorithmiques ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :

- ✓ Cette épreuve est composée d'un exercice et de deux parties tous indépendants ;
- ✓ Toutes les instructions et les fonctions demandées seront écrites en Python ;
- ✓ Les questions non traitées peuvent être admises pour aborder les questions ultérieures ;
- ✓ Toute fonction peut être décomposée, si nécessaire, en plusieurs fonctions.

Important **: Le candidat doit impérativement commencer par traiter toutes les questions de l'exercice ci-dessous, et écrire les réponses dans les premières pages du cahier de réponses.**

Exercice : (4 points)

L'exponentiation rapide est un algorithme de complexité *logarithmique O(logn)*, qui permet de calculer x^n :

```
Fonction puiss (x, n) :
    p ← 1
    Tant que  n ≠ 0  faire
        Si n est impair Alors
            p ← p*x
        Fin Si
        x ← x²
        n ← n/2
    Fin Tant que
    Retourner  p
```

Q.1- Écrire la fonction ***puiss (x, n)*** qui reçoit en paramètres un réel x, et un entier positif ***n***. En utilisant l'algorithme de l'exponentiation rapide ci-dessus, la fonction retourne la valeur de x^n.

Un polynôme à coefficients réels est représenté par une liste ***L*** : chaque élément L_i contient le coefficient du monôme de degré **i**.

Exemples :

- ✓ Le polynôme $7 + 4x - 3x^2 + x^5$ est représenté par la liste **[7, 4, -3, 0, 0, 1]**
- ✓ La liste **[5, -2, 0, -4, 7, 0, -2]** représente le polynôme $-2x^6 + 7x^4 - 4x^3 - 2x + 5$

Q.2- Écrire la liste qui représente le polynôme : $-3x^3 + 7x^2 - x^6 + 10 - 2x^4$

Q.3- Écrire la fonction ***valeur (x, L)*** qui reçoit en paramètres un réel x, et une liste ***L*** qui représente un polynôme. En utilisant la fonction *puiss*, la fonction retourne l'image de x par le polynôme ***L***.
Exemple : valeur (3, [5, -2, 0, -4, 7, 0, -2]) retourne $5*3^0 - 2*3^1 + 0*3^2 - 4*3^3 + 7*3^4 + 0*3^5 - 2*3^6 = -1000$

Q.4- Déterminer la complexité de la fonction **valeur (*x*, L)**, avec justification.

Q.5- Écrire la fonction ***images (X, L)*** qui reçoit en paramètres une liste de réels X, et une liste ***L*** qui représente un polynôme. La fonction retourne la liste Y contenant les images des éléments de X par le polynôme ***L***.

Q.6- On note le polynôme $L^2 = L \circ L$ (**L** rond **L**, **2** fois) et $L^n = L \circ L \circ L \ldots \circ L$ (**n** fois)
Écrire la fonction ***compose (x, L, n)*** qui reçoit en paramètres un réel x, une liste ***L*** qui représente un polynôme et un entier **n>0**. La fonction retourne l'image de x par le polynôme composé L^n.

Partie I : PROGRAMMATION ET CALCUL SCIENTI FIQUE

Produit d'une chaîne matricielle

Dans cette partie, on suppose que le module ***numpy*** est importé :

```
import numpy as np
```

Le produit matriciel d'une chaîne de matrices (séquence d'au moins deux matrices) est un problème d'optimisation qui permet de trouver le moyen le plus efficace pour calculer le produit de plusieurs matrices.

La multiplication matricielle est associative, car peu importe comment le produit est mis entre parenthèses, le résultat obtenu restera le même. Par exemple, pour quatre matrices M_0 de dimension ***(20, 10)*** *(20 lignes et 10 colonnes)*, M_1 de dimension ***(10, 35)***, M_2 de dimension ***(35 , 8)***, et M_3 de dimension ***(8, 12)***, on a :

$$((M_0*M_1)*M_2)*M_3 = (M_0*(M_1*M_2))*M_3 = (M_0*M_1)*(M_2*M_3) = M_0*((M_1*M_2)*M_3) = M_0*(M_1*(M_2*M_3))$$

Cependant, l'ordre dans lequel le produit est mis entre parenthèses affecte le nombre de multiplications nécessaires pour calculer ce produit. Le nombre de multiplications dans chaque produit est présenté dans le tableau suivant :

Produit matriciel	Compte des multiplications
$((M_0*M_1)*M_2)*M_3$	**(20*10*35) + 20*35*8) + 20*8*12 = *14520***
$(M_0*(M_1*M_2))*M_3$	**(10*35*8 + (20*10*8)) + 20*8*12 = *6320***
$(M_0*M_1)*(M_2*M_3)$	**(20*10*35) + (35*8*12) + 20*35*12 = *18760***
$M_0*((M_1*M_2)*M_3)$	**10*35*8 + ((10*8*12) + 20*10*12) = *6160***
$M_0*(M_1*(M_2*M_3))$	**35*8*12 + (10*35*12 + (20*10*12)) = *9960***

De toute évidence, le produit $M_0*((M_1*M_2)*M_3)$ est le plus efficace.

Énoncé du problème : On se donne une chaîne de **n** matrices M_0, M_1, M_2, …, M_{n-1} (avec $n>1$), et on souhaite calculer le produit matriciel *:* $M_0*M_1*M_2*\ldots*M_{n-1}$ *(on suppose que toutes les matrices ont des tailles compatibles, c'est-à-dire que le produit est bien défini)*. Le produit matriciel étant associatif, n'importe quel « parenthésage » du produit donnera le même résultat. Avant d'effectuer tout calcul, on cherche à déterminer quel « parenthésage » nécessitera le moins de multiplications.

Pour représenter la chaîne de matrices M_0, M_1, …, M_{n-1}, on utilise une liste $T = [\, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n \,]$, telle que :

- t_0 est le nombre de ligne dans la matrice M_0
- t_1 est à la fois le nombre de colonnes dans M_0, et le nombre de lignes dans M_1
- t_2 est à la fois le nombre de colonnes dans M_1, et le nombre de lignes dans M_2
- …
- t_{n-1} est à la fois le nombre de colonnes dans M_{n-2}, et le nombre de lignes dans M_{n-1}
- t_n est le nombre de colonnes dans M_{n-1}

Exemple :

T = [20, 10, 35, 8, 12]

La liste ***T*** représente la chaîne de matrices dont les tailles sont : ***(20, 10)***, ***(10, 35)***, ***(35, 8)*** et ***(8, 12)***.

A- Calcul du nombre minimum de multiplications dans le produit d'une chaîne matricielle

A.1- Algorithme naïf

Une solution possible est de procéder par force brute en énumérant tous les « parenthésages » possibles pour en retenir le meilleur. L'idée est de décomposer le problème en un ensemble de sous-problèmes liés.

Pour calculer le nombre minimal de multiplications dans le produit matriciel de la chaîne de matrice M_0, M_1, M_2, …, M_{n-1} :

- On découpe cette séquence de matrices en deux séquences : M_0, M_1, …, M_k et M_{k+1}, M_{k+2}, …, M_{n-1} ;
- En utilisant la récursivité, on calcule ***m1*** et ***m2*** les deux nombres minimaux de multiplications dans le produit de chacune des deux séquences ;
- À la somme ***m1+m2***, on ajoute le nombre de multiplications dans le produit des deux matrices résultats des deux séquences ;
- Faire cela pour chaque position possible ***k*** à laquelle la séquence de matrices peut être découpée, et prendre le minimum sur toutes.

Voici l'algorithme d'une fonction récursive qui calcul le nombre minimal de multiplications dans le produit d'une chaîne de matrices, représentée par la liste ***T***. ***i*** et ***j*** sont deux indices dans la liste ***T*** tels que ***i<j***.

```
Fonction minProduit (T, i, j)
    Si i = j-1 Alors
        Retourner 0
    Fin Si
    R ← liste vide
    Pour k = i+1 à j-1 faire
        c ← minProduit(T, i, k) + minProduit(T, k, j) + T[i]*T[k]*T[j]
        Ajouter c à la liste R
    Fin Pour
    Retourner le minimum de R
```

Q.7- Écrire la fonction ***minProduit (T, i, j)*** qui reçoit en paramètres une liste ***T*** représentant une chaîne de matrices, ***i*** et ***j*** deux indices dans ***T*** tels que ***i<j***. La fonction retourne le nombre minimum de multiplications, dans le produit de la chaîne de matrices représentée par la liste ***T***.

Exemple :

T = [20, 10, 35, 8, 12]

minProduit (T, 0, len(T)-1) retourne le nombre : ***6160***

A.2- Programmation dynamique Top-Down (Mémoïsation)

La fonction précédente ***minProduit*** n'est pas envisageable, sa complexité est exponentielle (*elle fait appel à elle-même, plusieurs fois, avec les mêmes paramètres*). Pour cela, on propose d'utiliser la mémoïsation :

*On utilise un dictionnaire **D**, dans lequel on stocke les valeurs renvoyées par les appels de la fonction. Et lorsque la fonction est appelée à nouveau avec les mêmes paramètres, elle renvoie la valeur stockée dans le dictionnaire **D**, au lieu de la recalculer.*

- Les clés du dictionnaire ***D*** sont les différents tuples d'indices ***(i, j)*** tels que ***0≤i<j<taille de T*** ;
- La valeur de chaque clé ***(i, j)*** de ***D*** est le nombre minimum de multiplications dans le produit de la chaîne de matrices représentée par la sous liste ***[T_i , T_{i+1} , … , T_j]***.

Q.8- Écrire la fonction ***minPrd (T, i, j)*** qui reçoit en paramètres une liste ***T*** représentant une chaîne de matrices, ***i*** et ***j*** deux indices dans ***T*** tels que ***i<j***. En utilisant le principe de la mémoïsation, la fonction retourne le nombre minimal de multiplications dans le produit de la chaîne de matrices représentée par ***T***.

Exemple :

D = { } et ***T = [20, 10, 35, 8, 12]***

minPrd (T, 0, len(T)-1) retourne le nombre : ***6160***

Le dictionnaire ***D*** contient les éléments suivants :

{ (0, 1): 0 , (1, 2): 0 , (2, 3): 0 , (3, 4): 0 , (2, 4): 3360 , (1, 3): 2800 , (1, 4): 3760 , (0, 2): 7000 , (0, 3): 4400, (0, 4): 6160 }

A.3- Programmation dynamique Bottom-Up

Le problème a une structure telle qu'un « sous-parenthésage » optimal est lui-même optimal. De plus un même « sous-parenthésage » peut intervenir dans plusieurs « parenthésages » différents. Ces deux conditions rendent possible la mise en œuvre de la programmation dynamique.

On remarque que pour un parenthésage optimal du produit $M_i * M_{i+1} \ldots * M_j$, si le dernier produit matriciel calculé est $(M_i * M_{i+1} * \ldots * M_k) * (M_{k+1} * M_{k+2} * \ldots * M_j)$, alors les « parenthésages » utilisés pour le calcul des produits $M_i * M_{i+1} * \ldots * M_k$ et $M_{k+1} * M_{k+2} * \ldots * M_j$ sont eux aussi optimaux.

La même hypothèse d'optimalité peut être faite pour tous les « parenthésages » de tous les produits intermédiaires au calcul du produit $M_i * M_{i+1} \ldots * M_j$ et donc pour tous ceux du calcul du produit $M_0 * M_1 * M_2 * \ldots * M_{n-1}$. Cela permet une résolution grâce à la programmation dynamique.

Pour calculer le nombre minimal de multiplication des « sous-parenthésages », on utilise une matrice carrées ***C*** de ***n*** lignes et ***n*** colonnes (***n*** *étant le nombre de matrices dans le produit*), telle que chaque élément $C_{i,j}$ contient le nombre minimal de multiplications dans le produit matriciel $M_i * M_{i+1} \ldots * M_j$

Pour calculer les éléments de la matrice ***C***, on utilise l'algorithme **(1)** suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} si\ i \geq j \quad alors \quad C_{i,j} \leftarrow 0 \\ Sinon\ C_{i,j} \leftarrow \min\limits_{i \leq k < j} \left\{ C_{i,k} + C_{k+1,j} + T_i * T_{k+1} * T_{j+1} \right\} \end{cases}$$

Exemple :

T = [20, 10, 35, 8, 12]

La matrice ***C*** contient les éléments suivants :

```
[ [ 0 7000  4400  6160 ]
  [ 0    0  2800  3760 ]
  [ 0    0     0  3360 ]
  [ 0    0     0     0 ] ]
```

***NB** : L'élément en haut à droite de la matrice **C** contient le nombre minimal de multiplications.*

Les éléments de ***C*** doivent être calculés de proche en proche, dans l'ordre des diagonales suivant :

	Matrice *C*
Première diagonale	***7000 → 2800 → 3360***
Deuxième diagonale	***4400 → 3760***
Troisième diagonale	***6160***

Q.9- Écrire la fonction ***matriceC (T)*** qui reçoit en paramètre une liste ***T*** représentant une chaîne de matrices. En utilisant l'algorithme **(1)** décrit précédemment, la fonction retourne la matrice ***C***.

B- Recherche du « parenthésage » optimal

Pour trouver le « parenthésage » optimal qui correspond au nombre minimal de multiplications dans le produit de la chaîne de matrices, on utilise une matrice carrée ***P*** de même dimension que ***C***, telle que chaque élément $P_{i,j}$ contient l'indice ***k*** tel que le « parenthésage » optimal du produit soit $(M_i * M_{i+1} * \ldots * M_k) * (M_{k+1} * M_{k+2} * \ldots * M_j)$.

Pour calculer les éléments de la matrice ***P***, on utilise l'algorithme **(2)** suivant :

$$(2) \quad \begin{cases} si\ i \geq j \quad alors \quad P_{i,j} \leftarrow 0 \\ Sinon\ P_{i,j} \leftarrow k,\ tel\ que \quad C_{i,k} + C_{k+1,j} + T_i * T_{k+1} * T_{j+1} = C_{i,j} \end{cases}$$

Exemple :

T = [20, 10, 35, 8, 12]

Les matrices ***C*** et ***P*** sont les suivantes :

Matrice *C*

```
[ [ 0 7000  4400  6160 ]
  [ 0    0  2800  3760 ]
  [ 0    0     0  3360 ]
  [ 0    0     0     0 ] ]
```

Matrice *P*

```
[ [ 0  0  0  0 ]
  [ 0  0  1  2 ]
  [ 0  0  0  2 ]
  [ 0  0  0  0 ] ]
```

Les éléments de ***P*** doivent être calculés de proche en proche, dans l'ordre des diagonales suivant :

	Matrice *C*	**Matrice *P***
Première diagonale	***7000 → 2800 → 3360***	***0 → 1 → 2***
Deuxième diagonale	***4400 → 3760***	***0 → 2***
Troisième diagonale	***6160***	***0***

Q.10- Écrire la fonction ***matriceP (T, C)*** qui reçoit en paramètres une liste ***T*** représentant la chaîne de matrices et la matrice ***C*** résultant de l'algorithme **(1)**. En utilisant l'algorithme **(2)** décrit précédemment, la fonction retourne la matrice ***P***.

C- Calcul du produit matricielle d'une chaîne de matrices

Chaque élément $P_{i,j}$ de la matrice ***P***, contient l'indice ***k*** tel que le « parenthésage » optimal du produit matriciel $M_i*M_{i+1}*\ldots*M_k*M_{k+1}*M_{k+2}*\ \ldots*M_j$ soit $(M_i*M_{i+1}*\ldots*M_k)\ *\ (M_{k+1}*M_{k+2}*\ \ldots*M_j)$. Donc on peut utiliser les éléments de la matrice ***P*** pour calculer le produit d'une chaîne matricielle.

Exemple :

On suppose que la liste ***M*** contient les matrices d'une chaîne matricielle :

$M = [M_0, M_1, M_2, M_3]$

Et la matrice ***P*** est la suivante :

```
P = [ [ 0  0  0  0 ]
      [ 0  0  1  2 ]
      [ 0  0  0  2 ]
      [ 0  0  0  0 ] ]
```

À partir de la matrice ***P***, on peut déduire que :

- ✓ Le « parenthésage » optimal du produit $M_0*M_1*M_2*M_3$ est $M_0*(M_1*M_2*M_3)$ car $P_{0,3}$ vaut **0**
- ✓ Le « parenthésage » optimal du produit $M_1*M_2*M_3$ est $(M_1*M_2)*M_3$ car $P_{1,3}$ vaut **2**

Ainsi, pour calculer le **produit** matriciel de la chaîne matricielle ***M***, on peut utiliser la relation de récurrence suivante :

i et ***j*** sont deux indices dans ***M*** tels que ***i<=j***.

- ➢ ***si i=j alors produit (M, i, j) = M_i***
- ➢ ***si i=j-1 alors produit (M, i, j) = M_i * M_j***
- ➢ ***si i<j-1 alors produit (M, i, j) = produit (M, i, $P_{i,j}$) * produit (M, $P_{i,j}$ +1, j)***

Rappel :

*Le module **numpy** contient la méthode **dot**, qui permet de calculer le produit matriciel de deux matrices.*

Q.11- Écrire la fonction ***produit_matriciel (M)*** qui reçoit en paramètre la liste ***M*** contenant au moins deux matrices compatibles pour le produit matriciel. La fonction calcule le produit matriciel des matrices de ***M***, en utilisant le « parenthésage » optimal, et elle retourne la matrice résultante.

Exemple :

$M = [M_0, M_1, M_2, M_3]$.

La fonction ***produit_matriciel*** **(M)** retourne la matrice résultat du produit matriciel de la chaîne de matrices **M**, en utilisant le « parenthésage » optimal : $M_0*(\ (M_1*M_2)*M_3\ )$

Partie II : Problème

Segmentation d'image

Une image matricielle est représentée par une matrice. Chaque élément de la matrice est appelé : *pixel*. Il existe plusieurs modes pour représenter les couleurs des pixels. Le plus utilisé est l'espace colorimétrique ***RVB*** pour *Rouge*, *Vert*, *Bleu* (ou ***RGB*** - *Red*, *Green*, *Blue*).

Cet espace est basé sur une synthèse additive des couleurs. Il consiste essentiellement à représenter une couleur par trois nombres entiers compris entre ***0*** et ***255***, qui représentent les intensités respectives du *rouge*, du *vert* et du *bleu*. Le mélange des trois composantes à leur valeur maximum donne du blanc, à l'instar de la lumière. Le nombre de couleurs différentes pouvant être ainsi représenté est de $\boldsymbol{256^3}$ possibilités, soit environ ***16,7 millions*** de couleurs.

Comme la différence de nuance entre deux couleurs très proches, mais différentes dans ce mode de représentation, est quasiment imperceptible pour l'œil humain, on considère commodément que ce système permet une restitution exacte des couleurs, c'est pourquoi on parle de couleurs vraies.

Exemple :

Cette image est représentée par la matrice ***M***, de dimension : ***730*** lignes et ***950*** colonnes :

[[[148, 155, 148], [143, 150, 143], [143, 150, 143], …, [153, 161, 163]],
[[145, 152, 145], [143, 150, 143], [142, 149, 142], …, [151, 159, 161]],
…
[[31, 35, 18] , [48, 52, 35] , [54, 58, 44] , …, [43, 75, 10]]]

Par exemple, la liste **[148, 155, 148]** est l'élément $\boldsymbol{M_{0,0}}$. Cette liste représente la couleur du pixel d'indices ***(0,0)*** dans l'image représentée par la matrice ***M***.

*NB : Dans la suite de cette partie, on utilisera la matrice **M** dans les exemples des fonctions*.

Taille d'une image couleur

Q.12- Quel est le nombre minimal de bits nécessaire pour coder un entier sans signe, compris entre ***0*** et ***255*** ?

Q.13- Donner la taille en ***Kilo-Octet***, d'une image couleur représentée par une matrice de ***1000*** lignes et ***1800*** colonnes.

Histogramme d'une image couleur

Q.14- Écrire la fonction ***histogramme (M)*** qui reçoit en paramètre une matrice ***M*** représentant une image couleur. La fonction retourne une matrice ***H*** qui représente l'histogramme de l'image, telle que :

- La dimension de la matrice ***H*** est : ***3*** lignes, ***256*** colonnes ;
- La valeur de chaque élément $H_{0,i}$ est le compte des pixels de ***M***, ayant la valeur ***i*** pour l'intensité du **rouge** ;
- La valeur de chaque élément $H_{1,i}$ est le compte des pixels de ***M***, ayant la valeur ***i*** pour l'intensité du **vert** ;
- La valeur de chaque élément $H_{2,i}$ est le compte des pixels de ***M***, ayant la valeur ***i*** pour l'intensité du **bleu**.

Exemple :

La fonction ***histogramme (M)*** retourne la matrice ***H*** suivante :

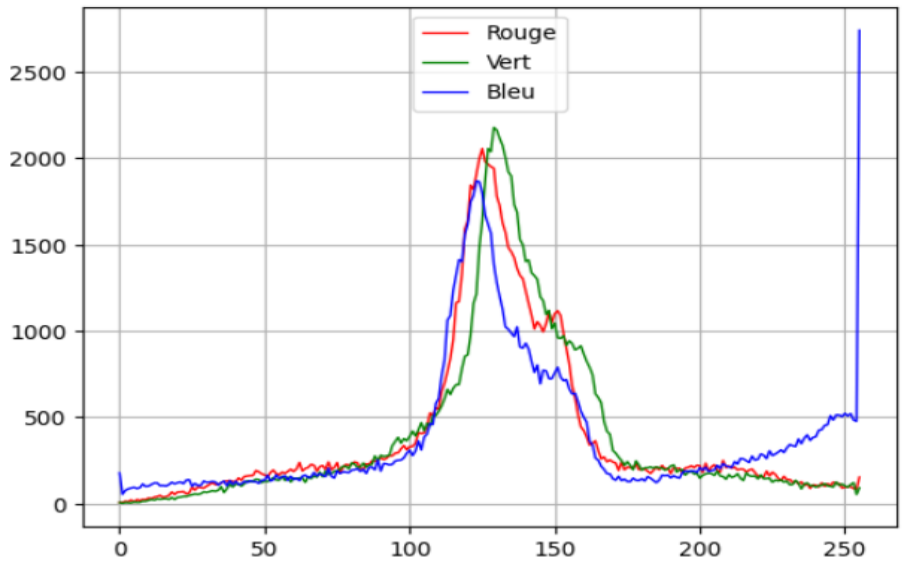
H = [[7, 5, 14, 11, 21, 9, 23, 18, 24, 22, 32, 29, 37, 41, 47, 36, 40, 47, 67, 53, 67, 67, 70, 56, …, 84, 153],
[6, 2, 6, 5, 4, 10, 7, 8, 14, 14, 19, 24, 20, 27, 25, 27, 29, 24, 35, 24, 36, 37, 42, 41, 47, 51, …, 53, 91],
[177, 54, 76, 85, 90, 94, 87, 92, 113, 99, 101, 111, 119, 119, 103, 105, 101, 110, 123, …, 477, 2742]]

Q.15- Écrire la fonction ***representation (H)*** qui reçoit en paramètre la matrice ***H*** représentant l'histogramme d'une image couleur, et qui trace les trois courbes (*Rouge, Vert, Bleu*) représentatives de l'histogramme.

On suppose que le module **matplotlib.pyplot** est importé :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exemple :



Segmentation d'une image, c'est quoi ?

La segmentation d'une image est une technique qui consiste à découper de façon automatique une image en zones de pixels appartenant à une même classe d'objets. La segmentation d'images a de nombreuses applications, notamment en imagerie médicale, analyse d'images satellitaires, voitures autonomes …

La segmentation d'une image est à la base un problème de classification de pixels. Chaque pixel de l'image doit être associé à un ensemble d'autres pixels, que l'on affecte à une classe. L'objectif de la segmentation d'une image est de changer sa représentation en quelque chose de plus significatif et plus facile à analyser.

Une des méthodes envisageables pour séparer les pixels en classes est l'utilisation de l'algorithme ***K-means***.

L'algorithme *K-means* (*K-moyennes*) est l'un des algorithmes de clustering (*algorithmes non supervisés*) utilisés dans la segmentation d'une image en plusieurs clusters : Les pixels de l'image ayant des couleurs similaires sont regroupés dans le même cluster.

Pour la segmentation d'une image ***M***, le principe de l'algorithme ***K-means*** est le suivant :

1. Définir la fonction qui calcule de distance entre deux pixels ;
2. Choisir un entier ***k*** non nul, qui représente le nombre de clusters (groupes) ;
3. Choisir une liste de ***k*** pixels différents dans ***M***. Ces pixels sont appelés *centroïdes* ;
4. Construire ***k*** clusters : Chaque cluster contient les pixels de ***M*** qui possèdent le même plus proches centroïde ;
5. Mettre à jours la liste des centroïdes : Calculer le nouveau centroïde de chaque cluster ;
6. Répéter les étapes ***4*** et ***5*** jusqu'à convergence : la convergence correspond au fait que les centroïdes ne changent pas après une mise à jours. Mais cette convergence n'est pas garantie. Il faut donc arrêter après un nombre maximal de ***n*** répétitions.

Distance entre deux pixels

Pour la mesure de similarité entre deux pixels, on propose d'utiliser la ***distance de Manhattan***.

X et ***Y*** étant deux listes contenant les couleurs de deux pixels. La distance de *Manhattan* entre ces deux pixels est définie comme la somme des valeurs absolues des différences de chacun de leurs attributs. Elle est exprimée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{distance}\ (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} |\boldsymbol{X_i} - \boldsymbol{Y_i}|$$

Q.16- Écrire la fonction ***distance (X, Y)*** qui reçoit en paramètres deux listes ***X*** et ***Y*** représentant les couleurs de deux pixels. La fonction retourne la valeur de la distance de Manhattan entre les deux pixels ***X*** et ***Y***.

Exemple :

distance ([239, 230, 247], [127, 132, 125]) retourne le nombre ***332***

Initialisation des centroïdes

Rappel : On suppose que la méthode **randint** du module **random** est importée.

La méthode **randint** reçoit en paramètres deux entiers **a** et **b** (**a≤b**), et elle renvoie un entier **x** choisi aléatoirement entre **a** et **b**.

Exemple : random (0, 100) renvoie **63**

Q.17- Écrire la fonction ***init_centroides (M, k)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur, et ***k*** un entier strictement positif. La fonction retourne une liste ***C*** contenant ***k*** différents pixels choisis de façon aléatoire dans la matrice ***M***.

Exemple :

init_centroides (M, 3) retourne la liste ***C = [[150, 160, 152], [119, 124, 118], [187, 177, 250]]***

Plus proche centroïde

Q.18- Écrire la fonction ***proche_centroide (P, C)*** qui reçoit en paramètres une liste ***P*** qui représente un pixel, et la liste ***C*** des centroïdes. La fonction retourne l'indice du centroïde de ***C*** le plus proche au pixel ***P***, selon la distance de Manhattan.

Exemples :

C = [[150, 160, 152], [119, 124, 118], [187, 177, 250]]

- ***proche_centroide ([137, 140, 133], C)*** retourne ***1*** *[119, 124, 118] est le plus proche à ce pixel*
- ***proche_centroide ([207, 205, 255], C)*** retourne ***2*** *[187, 177, 250] est le plus proche à ce pixel*
- ***proche_centroide ([154, 130, 170], C)*** retourne ***0*** *[150, 160, 152] est le plus proche à ce pixel*

Segmentation de l'image

La liste ***C*** contient ***k*** centroïdes. La segmentation de l'image consiste à créer une nouvelle matrice ***R*** de même dimension que ***M***. La valeur de chaque élément $R_{i,j}$ est l'indice du centroïde de ***C*** le plus proche au pixel $M_{i,j}$.

Q.19- Écrire la fonction ***segmentation (M, C)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur, et la liste ***C*** des centroïdes. La fonction retourne la matrice ***R***.

Exemple :

C = [[150, 160, 152], [119, 124, 118], [187, 177, 250]]

segmentation (M, C) retourne la matrice ***R*** suivante :

[[0, 0, 0, …, 0, 2, 2 , 0, 0, …, 1, 1, 1, 1, ..., 0, 0, 0],
[0, 0, 0, …, 0, 0, 0 , 0, 0, …, 1, 1, 1, 1, ..., 0, 0, 0],
…
…
[1, 1, 1, …, 2, 2, 2 , 2, 2, …, 1, 1, 1, 1, ..., 0, 0, 0],
…
[1, 1, 1, 1, 1, 1 , 1, 1, 1, 1, 1, ..., 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]]

Mise à jour de la liste des centroïdes

Un centroïde est la moyenne arithmétique de tous les pixels appartenant à un cluster particulier. Ainsi, pour calculer le nouveau centroïde ***c*** d'un cluster de ***n*** pixels, on utilise la formule suivante, qui permet de calculer chaque composante c_q *(q=0 pour le rouge ou q=1 pour le vert ou q=2 pour le bleu*) :

$$c_q = \frac{1}{n} * \sum M_{i,j,q} \quad pour\ tout\ pixel\ M_{i,j}\ \ du\ même\ cluster$$

Q.20- Écrire la fonction ***nv_centroide (M, R, g)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur, la matrice ***R*** des indices des centroïdes et ***g*** un entier positif qui représentent l'indice d'un centroïde (***g*** est un élément de ***R***). La fonction retourne une nouvelle liste qui représente le nouveau centroïde de tous les pixels de ***M*** tels que ***g*** est l'indice du centroïde le plus proche à ces pixels.

Exemples :

- ***nv_centroide (M, R, 0)*** retourne le centroïde ***[149, 152, 152]***
- ***nv_centroide (M, R, 1)*** retourne le centroïde ***[* 108, 114, 113 *]***
- ***nv_centroide (M, R, 2)*** retourne le centroïde ***[* 198, 192, 239 *]***

Q.21- Écrire la fonction ***maj_centroides (M, R, k)*** qui reçoit en paramètre la matrice ***M*** qui représente une image couleur, la matrice ***R*** des indices des centroïdes et ***k*** un entier strictement positif qui représentent le nombre de clusters. La fonction retourne une nouvelle liste ***C*** qui contient les nouveaux centroïdes de chaque cluster.

Exemple :

maj_centroides (M, R, 3) retourne la nouvelle liste ***C*** contenant trois centroïdes :

C = [[149, 152, 152], [* 108, 114, 113 *], [* 198, 192, 239 *]]

Segmentation en utilisant l'algorithme K-means

Q.22- Écrire la fonction ***kmeans (M, k, n)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur, ***k*** un entier strictement positif qui représente le nombre de clusters et ***n*** un entier strictement positif qui représente le nombre maximal de répétitions. En utilisant l'algorithme **k-means**, la fonction effectue la segmentation de l'image ***M*** en ***k*** clusters, et elle retourne la matrice ***R*** des indices des centroïdes et la liste ***C*** des centroïdes des clusters de ***R***.

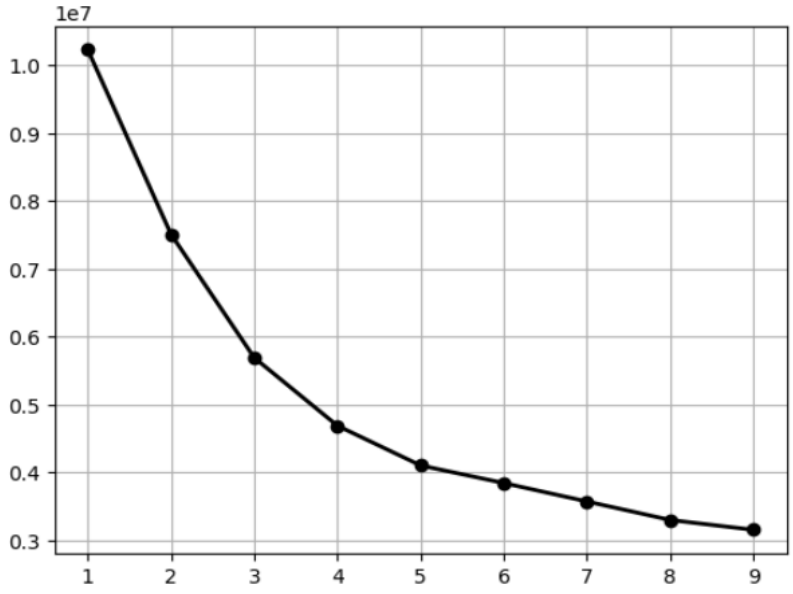
Recherche du nombre k optimum (méthode Elbow)

Pour un même jeu de données, il y a de nombreux partitionnements possibles. Il faut donc choisir le nombre de clusters ***k*** le plus pertinent pour mettre en lumière les patterns intéressants.

Hélas, il n'existe pas de procédé automatique pour cela. Parmi les méthodes pour déterminer le nombre ***k*** idéal, il existe la méthode Elbow ***(méthode du coude)***.

La méthode Elbow s'appuie sur la notion d'inertie intraclasse. On définit cette dernière comme ceci : **la somme des distances entre chaque pixel et son centroïde associé**, puis à placer les inerties obtenues sur un graphique. On obtient alors une visualisation en forme de coude, sur laquelle le nombre optimal de clusters est le point représentant la pointe du coude, c'est-à-dire celui correspondant au nombre de clusters à partir duquel la variance ne baisse plus significativement.

Exemple :



*À partie de cette représentation graphique, on déduit que le nombre **k** optimum est **4***

Q.23- Écrire la fonction ***calcul_inertie (M, R, C)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur, la matrice ***R*** des indices des centroïdes et la liste ***C*** des centroïdes. La fonction retourne la somme des distances entre chaque pixel et son centroïde associé *(centroïde le plus proche à chaque pixel)*.

Exemple :

calcul_inertie (M, R, C) retourne le nombre ***5694464***

Q.24- Écrire la fonction ***inerties (M, n)*** qui reçoit en paramètres la matrice ***M*** qui représente une image couleur et ***n*** un entier strictement positif qui représente le nombre maximal de répétitions. La fonction retourne un dictionnaire des inerties tel que :

- ✓ Les clés du dictionnaire sont les valeurs de ***k,*** pour ***k=1, 2, 3, 4, …, 9*** ;
- ✓ La valeur de chaque clé est l'inertie correspondante à chaque valeur de ***k***.

Exemple :

inerties (M, 50) retourne le dictionnaire des inerties suivant :

{ 1 : 10231898 , 2 : 7520058 , 3 : 5694464 , 4 : 4790619 , 5 : 4126946 , 6 : 3895363 , 7 : 3396162 , 8 : 3099 661, 9 : 3053467 }

Base de données et langage SQL

Après la segmentation de l'image en plusieurs clusters, on propose de représenter l'image segmentée par une base de données composée d'une seule table : **'Segmentation'**.

Segmentation

ligne	*(Entier)*
colonne	(*Entier)*
rouge	*(Entier)*
vert	*(Entier)*
bleu	*(Entier)*
cluster	*(Entier)*

La table ***Segmentation*** est composée des champs suivants :

- Le champ ***ligne*** contient un entier qui représente l'indice de la ligne du pixel ;
- Le champ ***colonne*** contient un entier qui représente l'indice de la colonne du pixel ;
- Le champ ***rouge*** contient un entier qui représente l'intensité du rouge du pixel ;
- Le champ ***vert*** contient un entier qui représente l'intensité du vert du pixel ;
- Le champ ***bleu*** contient un entier qui représente l'intensité du bleu du pixel ;
- Le champ ***cluster*** contient un entier qui représente le cluster auquel appartient le pixel.

Exemples :

ligne	*colonne*	*rouge*	*vert*	*bleu*	*cluster*
0	*67*	*78*	*120*	*57*	*0*
0	*68*	*62*	*106*	*43*	*0*
2	*66*	*91*	*125*	*75*	*0*
0	*38*	*167*	*167*	*175*	*1*
1	*40*	*165*	*171*	*171*	*1*
1	*45*	*164*	*170*	*184*	*1*
4	*47*	*198*	*193*	*223*	*1*
0	*0*	*148*	*155*	*148*	*2*
0	*5*	*148*	*155*	*148*	*2*
…	*…*	*…*	*…*	*…*	*…*

Q.25- Déterminer la clé primaire de la table **Segmentation**. Justifier votre réponse.

Q.26- Écrire, en algèbre relationnelle, une requête qui donne pour résultat *les lignes, les colonnes, les intensités du rouge, du vert et du bleu des pixels du cluster 0 et des pixels du cluster 2.*

Q.27- Écrire une requête SQL qui donne pour résultat *les lignes, les colonnes, les intensités du rouge, du vert et du bleu des pixels du cluster 1 et des pixels du cluster 2, triés dans l'ordre croissant des lignes et colonnes.*

Q.28- Écrire une requête SQL qui donne pour résultat *les différents clusters, le compte de pixels dans chaque cluster, l'intensité du rouge du centroïde de chaque cluster, triés dans l'ordre décroissant des comptes des pixels. L'intensité du rouge du centroïde doit être comprise entre à 100 et 200.*

Q.29- Écrire une requête SQL qui donne pour résultat *la moyenne des comptes de pixels par cluster.*

********** **FIN** **********